3. tétel

M.k.f.fák, és jellemzésük c feszítő segítségével

Kruskal-algoritmus, és helyessége

**m.k.f.fa:** adott G irányítatlan gráf, és éleire egy költségfüggvény, k(e) ez e él költsége, és egy élhalmaz költsége a benne levő élek költségének összege.

F (F részhalmaza E-nek) egy minimál költségű feszítőfája G-nek, ha F feszítőfa, és a feszítőfák halmazából F-nek van a legkisebb költsége.

F minimál költségű feszítőerdő, ha feszítőerdő, és a feszítőerdők halmazából neki van a legkisebb költsége.

**C feszítő tulajdonság**

Adott G=(V,E) gráf, és egy hozzátartozó költségfüggvény, legyen Gc a legfeljebb c súlyú élek által feszített részgráf.

Gc =(V, Ec) ahol Ec ={e eleme E: k(e) <= c}

Egy adott F gráf (F gráf G-nek egy feszítőfája) c feszítő tulajdonságú, ha akármilyen c re teljesül, hogy az F-beli élek Ec-vel való metszete, a Gc-ben is feszítőerdőt alkotnak.

**Kruskal-algoritmus: adott egy gráf, és annak költségfüggvénye**

**Input:** G=(V,E), és k ktgfv

**Output:** F ⊆ E mkffa.

Elkezdjük behúzni az éleket, mindig a legkisebb költségűt. Amennyiben az adott i-edik él és az eddig meglévő fa nem alkot kört, az élt belevesszük, ha kört alkot akkor nem. Ezt mindaddig csináljuk amíg az összes élt meg nem vizsgáltuk.

Kruskal-algoritmus tulajdonságai:

Mindig feszítő erdőt ad, ha a gráf összefüggő volt akkor feszítőfát.

C feszítő tulajdonságú

**Kruskal algortimus helyességének bizonyítása:**

Mkffák struktúrája:

Lemma: Thf G=(V,E) gráf, és hozzátartozó ktgfv

F={f1, f2…. fl} részhalmaza a E-nek, és c tulajdonságú minden c>=0 ra, továbbá k(f1)≤k(f2)≤...≤k(fl). Vegyük F’-t amire ugyanezek igazak. Ekkor k(fi)≤k(f′ i ) teljesül ∀1≤i≤l esetén, így k(F)≤k(F′).

**BIZ:**

**Indirekt: thf k(fi)>k(f’i)=c.**

Ekkor az fi és az őt követő tagok már nem lehetnek benne az Ec és az F metszetében(mert az Ec ben csak a c-nél kisebbek szerepelnek)

Amiből következik, hogy az F és Ec metszete i nél kevesebb elemet tartalmaz. Az F c-feszítő tulajdonsága miatt (Ec ∩ F) a Gc egy olyan feszítő erdeje, ami i-nél kevesebb élt tartalmaz.

Viszont az F’ élei is Ec beliek, és többen vannak, ergó az F’ ben valahol lenne egy kör, amiből ellentmondás következik, tehát az eredeti feltevés helyes.

1, A lemma bebizonyítsából következik, hogy a Kruskal-algoritmus outputja mindig egy minimális költségű feszítő erdőt ad, mert az algoritmus outputja C-feszítő tulajdonságú.

2, Az F’ élhalmaz, minimális költségű feszítő erdeje G-nek <=> F’ c-feszítő tulajdonságú minden c>= 0 ra.

BIZ:

<=: ha F’ minden c re tartalmazza Gc egy feszítő erdejét, akkor a Lemma szerint F’ a G minimális költségű feszítőerdeje.

= > indirekt: thf valamelyik c>0 ra F’ nem feszítő erdeje Gc A lemma bizonyításából következik egy ellentmondás, tehát az eredeti feltevés igaz.

3, vaslogikával rájöttünk, hogy ha az input gráf egy összefüggő gráf, tehát a feszítőerdő egy komponens tehát az egy feszítőfa, ami minimális költségű.

**lépésszám: tfh n=csúcsok száma m=élek száma**

1,m szám sorba rendezéséhez a buborék rendezés legfeljebb (mNCR2) összehasonlítást használ.(megoldható konst\*m\* log2m lépésben is)

2, alkalmas adatstruktúrával az élekről konst\*log2n lépéssben meghatározható, hogy benne van-e F-ben vagy nem.

A Kruskal-algoritmus lépésszáma ezért felülről becsülhető konst \*(n + m)\*log2(n +m)-mel